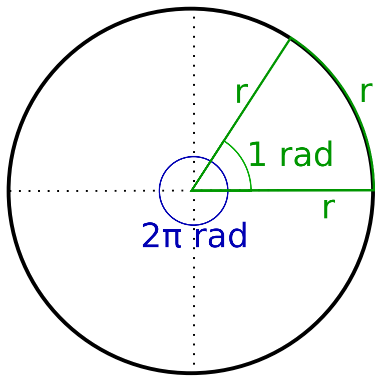
KAPITOLA 1.0

Základy matematiky

1.1 Rovinný úhel

S úhly jsme se již seznámili v matematice a fyzice. Hodnotu rovinného úhlu můžeme vyjadřovat ve stupních (°) a nebo v radiánech (rad), což je bezrozměrná jednotka.

Souvislost těchto dvou vyjádření a vztah převodu mezi nimi nejlépe popisuje jednotková kružnice na obr. 1.1 . Úhel jeden radián je dán středovým úhlem oblouku, který má stejnou velikost jako poloměr této kružnice. Vezmeme-li poloměr kružnice 1 cm, tak obvod je 2π cm. Když nyní podělíme obvod kružnice poloměrem kružnice (jednotkou délky), tak dostaneme celkový rovinný úhel 2π v radiánech (bezrozměrná jednotka). Vidíme tedy, že plný úhel v rovině má v radiánech hodnotu 2π a zároveň víme, že tomu odpovídá hodnota 360°.



Obrázek 1.1: jednotková kružnice s vyznačeným úhlem o velikosti 1 rad

Z této úvahy dostáváme velice důležité vztahy pro převod úhlů ze stupňů na radiány a obráceně. Tyto vztahy jsou důležité a je dobré si je pamatovat. V následujících kapitolách je budeme často používat.

$$1^\circ = \left(\frac{2\pi}{360}\right) \text{rad}$$

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ$$

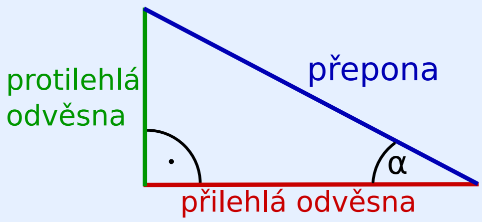
1.2 Goniometrické funkce

Goniometrické funkce jsou sin, cos, tan a coth. Jedná se o periodické funkce, z nichž sin a cos mají periodu 2π a funkce tan a coth mají periodu π. My se nyní budeme blíže zabývat funkcemi sin a cos, které pro nás budou v následující oblasti fyziky důležité. V následujícím rámečku jsou shrnuté důležité vztahy, které definují tyto funkce v pravoúhlém trojúhelníku.

Definice funkcí sin a cos v pravoúhlém trojúhelníku

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{prilehla odvesna}}{\text{prepona}}$$

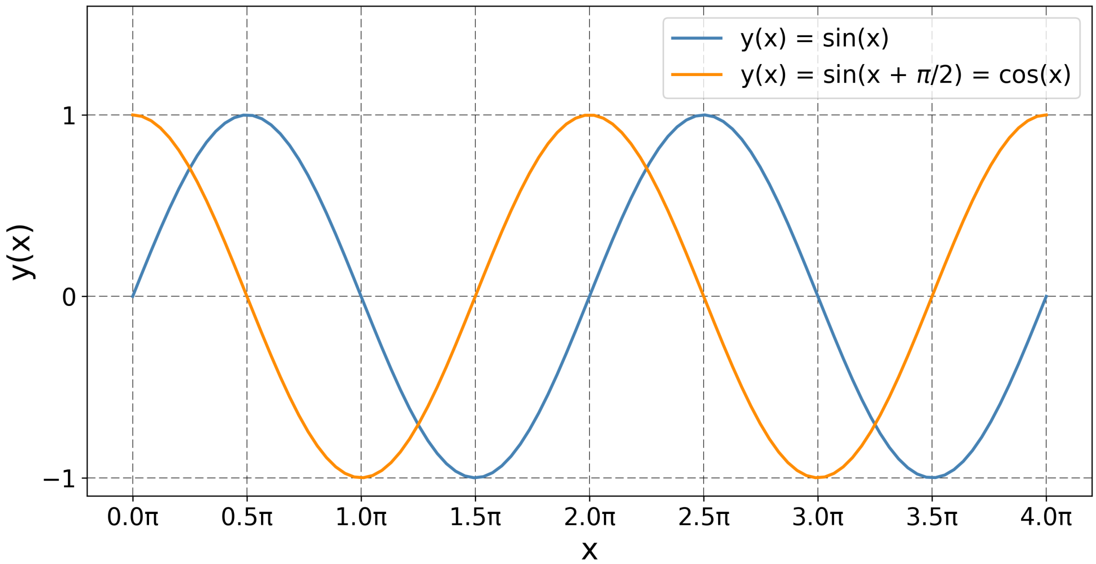
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{prilehla odvesna}}{\text{prepona}}$$



Obrázek 1.2: Pravoúhlý trojúhelník s vyznačenými odvěsnami, přeponou a vyznačenými úhly

1.2.1 Grafy funkcí sin(x) a cos(x)

Nyní se na $\sin(x)$ a $\cos(x)$ podíváme jako na funkce. Grafy těchto funkcí jsou na obr. 1.3. Z obrázku je zřejmé, že tyto funkce jsou podobné a jsou vůči sobě vzájěmně posunuté o $\pi/2$. Důležitá vlastnost těchto funkcí je také to, že jsou spojité.



Obrázek 1.3: Graf funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$

$$\boxed{\sin(x) = \cos(x + \pi/2)}$$

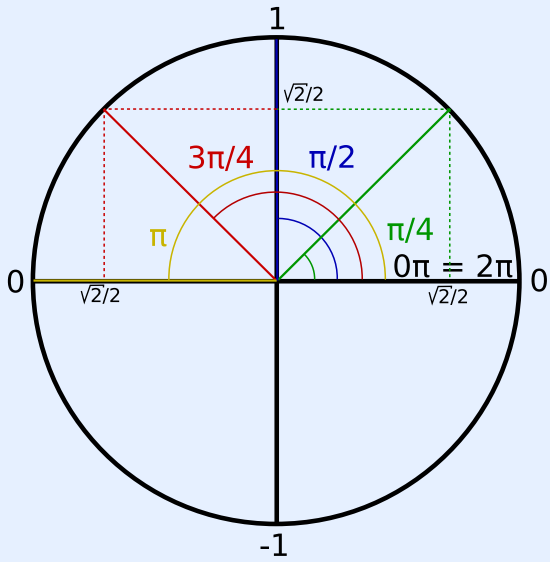
$$\boxed{\cos(x) = \sin(x - \pi/2)}$$

Pomocí tohoto obrázku můžeme také zcela zřetelně ověřit, že perioda těchto funkcí je skutečně 2π. Zároveň můžeme z grafu určit funkční hodnoty těchto funkcí pro význačné úhly. Tyto hodnoty jsou uvedeny v tabulce v modrém rámečku, kde je ještě vysvětlena souvislost s jednotkovou kružnicí.

Hodnoty význačných úhlů a jednotková kružnice

Na pravé straně vidíme jednotkouvou kružnici, na které jsou znázorněny některé význačné úhly (0π, $\pi/2$, $3\pi/4$ a π). Odpovídající hodnoty funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$, které jsou shrnuté v následující tabulce, se dají jednoduše určit právě z jednotkové kružnice použitím goniometrických vztahů ve vyznačených trojúhelnících.

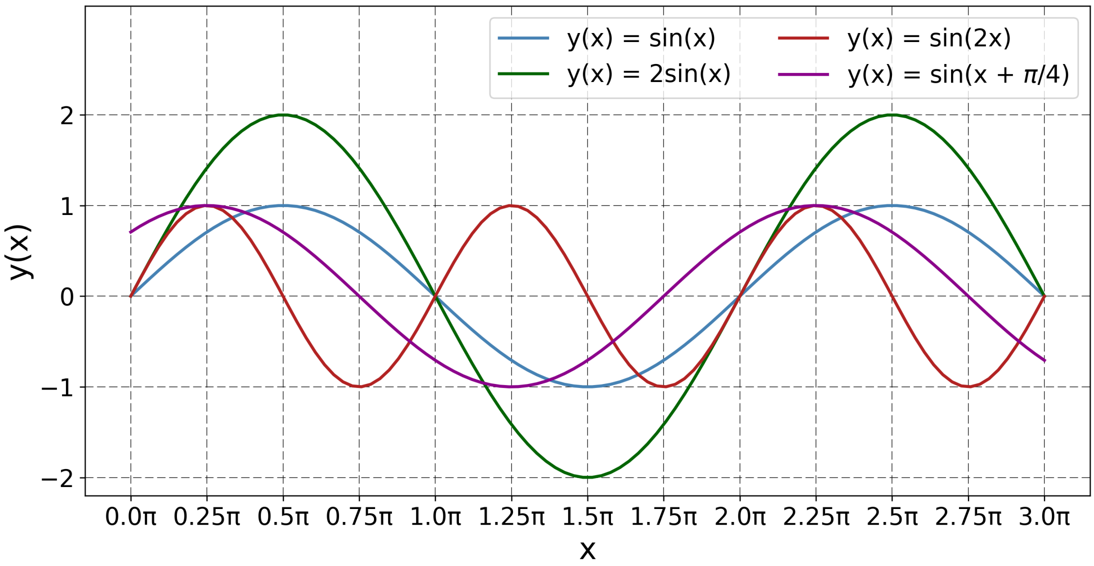
úhel $[rad]$	úhel $[°]$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0,0	0,0	0,0	1,0
$\pi/6$	30	0,5	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	60	$\sqrt{3}/2$	0,5
$\pi/2$	90	1,0	0,0
$3\pi/4$	135	$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{2}/2$
1,0π	180	0,0	-1,0
$5\pi/4$	225	-$\sqrt{2}/2$	-$\sqrt{2}/2$
$3\pi/2$	270	-1,0	0,0
$7\pi/4$	315	-$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
2,0π	360	0,0	1,0



Obrázek 1.4: Jednotková kružnice s vyznačením některých význačných úhlů a odpovídajích funkčních hodnot funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$

Nyní se podrobně podíváme na zápis funkce $\sin(x)$ s tím, že pro funkci $\cos(x)$ budou platit stejná pravidla. Na obrázku obr. 1.3 jsme viděli vykreslenou funkci $y(x) = \sin(x)$. Viděli jsme, že perioda této funkce je 2π a také to, že funkční hodnoty této funkce leží v intervalu $[-1; 1]$. Teď se podrobně podíváme na vlastnosti této funkce z pohledu tvaru jejího zápisu. Na následujícím obr. 1.5 můžeme vidět graf čtyř funkcí $\sin(x)$, které se vzájemně liší.

Na tomto obrázku vidíme, že vynásobíme-li funkci $\sin(x)$ dvojkou, tedy máme funkci $2\sin(x)$, tak dostaneme dvojnásobnou amplitudu. To nám ukazuje, že číslo před funkcí nám určuje hodnotu amplitudy (maximální hodnotu) funkce. Další funkce má dvojnásobný argument $\sin(2x)$ a na obrázku vidíme, že oscilace jsou rychlejší, má tedy menší periodu. To znamená, že se funkce opakuje na menším intervalu na ose x. U funkce $\sin(2x)$ vidíme, že perioda této funkce je pouze π. Poslední funkce se liší tím, že v argumentu je navíc konstanta, v našem případě je to $\pi/4$, máme tedy funkci $\sin(x + \pi/4)$. Vidíme, že důsledkem toho je posun začátku funkce, vypadá to, jak kdybychom funkci posunuli na ose x. Tyto případy popisují dohromady všechny možnosti, které mohou změnit tvar jedné funkce. Jedná se o důležité věci, které je dobré mít na paměti a jsou přehledně shrnuty v následujícím rámečku.



Obrázek 1.5: Graf funkcí $\sin(x)$, $2\sin(x)$, $\sin(2x)$ a $\sin(x+\pi/4)$

Obecný zápis funkce $\sin(x)$

$$\boxed{y(x) = \mathbf{A} \cdot \sin(\mathbf{B} \cdot x + \mathbf{C})}$$

- **A** – amplituda (max. hodnota)
- **B** – změna periody ($2\pi/\mathbf{B}$)
- **C** – fáze (posun na ose x)

Jelikož se ve fyzice s goniometrickými funkcemi potkáme a budeme s nimi počítat nejen v oddělených případech, tak je dobré si připomenout pravidla pro jejich počítání. Tyto vztahy jsou shrnuté v následujícím rámečku a je dobré si je připomenout a procvičit.

Vzorce goniometrických funkcí

$$
\begin{aligned}
1 &= \sin^2(x) + \cos^2(x) \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x) \\
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)
\end{aligned}
$$

1.3 Exponenciální funkce

1.3.1 Exponenciální funkce o stejném základu

Exponenciální funkce o stejném základu jsou funkce tohoto typu x^2 a x^{25}, nebo e^1, e^6 a e^{-10}. Funkce mají stejný základ, který je umocněn různými exponenty. Pro počítání funkcí o společném (stejném) základu platí jednoduchá pravidla, která jsou shrnuta v následujícím rámečku.